

Univerzitet u Nišu
Fakultet zaštite na radu u Nišu

NAIZMENIČNE STRUJE

dr Vladimir Stanković, docent

ELEKTROTEHNIKA
Skraćeni izvod predavanja
2018.

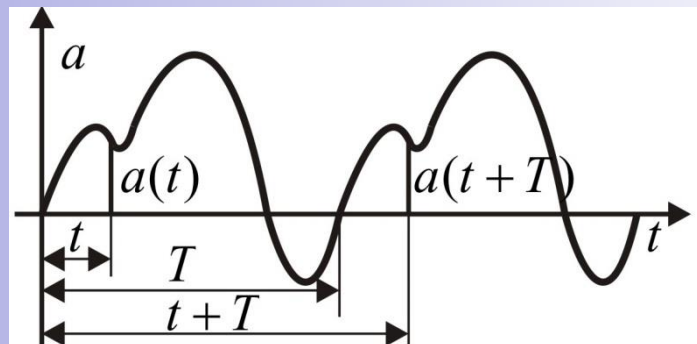
Prednosti

Mnogobrojni su razlozi za široku primenu naizmeničnih struja. Neki od najvažnijih su:

- Izuzetno jednostavna transformacija veličine napona (povećanje i smanjenje) – ekonomičan prenos električne energije na velike daljine.
- Jednostavno generisanje Teslinog obrtnog magnetnog polja, osnove za konstruisanje izuzetno jeftinih i pouzdanih električnih motora.
- Daleko manja cena i lakše održavanje električnih generatora i motora.
- Manji utrošak materijala i manji gubici u prenosu električne energije, posebno kada se radi o polifaznim sistemima.
- Korišćenje visokofrekventnih naizmeničnih struja za prenos informacija (telefonija, radio i televizija), radionavigaciju i lokaciju, za zagrevanje, u elektromedicini,...

Osnovni pojmovi

- Naizmenične struje i naponi su vremenski promenjive veličine kod kojih se tokom vremena menja bilo intenzitet, bilo smer, ili istovremeno i intenzitet i smer.
- Značajno mesto među vremenski promenjivim strujama i naponima zauzimaju periodične struje i naponi.
- Periodičnim veličinama se nazivaju veličine čije se vrednosti, na istovetan način, ponavljaju posle tačno određenog vremenskog intervala.
- Taj vremenski interval naziva se perioda, T , i predstavlja vreme trajanja jednog punog ciklusa.
- Ako sa $a(t)$ označimo trenutnu vrednost veličine, tj. vrednost periodične veličine u bilo kom trenutku, njena najopštija matematička interpretacija bi bila

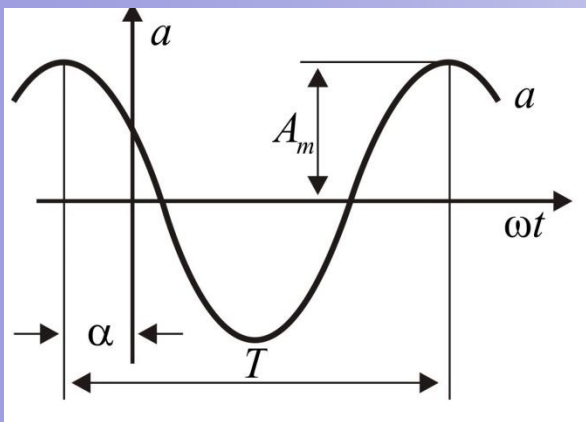


$$a(t) = a(t \pm kT), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Prostoperiodične veličine

- Pod prostoperiodičnim veličinama podrazumevamo veličine koje se menjaju po prostoperiodičnom zakonu, tj. po sinusnom ili kosinusnom zakonu.
- Uobičajeni naziv za ove veličine u elektrotehnici je naizmenične veličine.
- Tako razlikujemo naizmeničnu elektromotornu silu, naizmeničnu struju i naizmenični napon.
- U najopštijem slučaju, prostoperiodičnu veličinu definišemo sledećim izrazom

$$a(t) = a = A_m \cos \Phi = A_m \cos(\omega t \pm \alpha)$$



Osnovni elementi ove prostoperiodične veličine su:

a - trenutna vrednost

A_m - amplituda ili maksimalna vrednost

$\Phi = \omega t \pm \alpha$ - ukupna faza

α - početna faza ili početni fazni stav

$\omega = 2\pi f$ - kružna učestanost ili kružna frekvencija

$f = 1/T$ - učestanost ili frekvencija

T - perioda

Prostoperiodične veličine

Shodno prethodnom izrazu, za naizmeničnu elektromotornu silu, struju i napon, možemo pisati

$$e = E_m \cos(\omega t \pm \varphi_e)$$

$$i = I_m \cos(\omega t \pm \varphi_i)$$

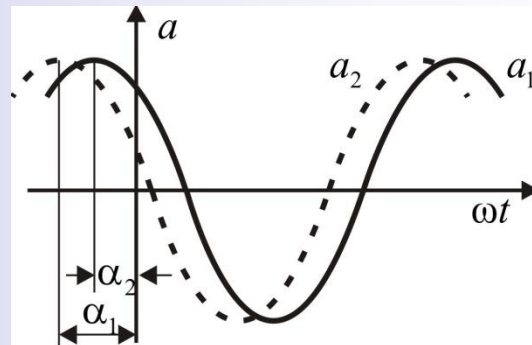
$$u = U_m \cos(\omega t \pm \varphi_u)$$

gde sa $\varphi_e, \varphi_i, \varphi_u$ početne faze ili početni fazni stavovi naizmenične elektromotorne sile, struje i napona, respektivno.

Fazna razlika dve prostoperiodične veličine, predstavlja razliku njihovih ukupnih faza u bilo kom trenutku, $\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$.

Ako imamo dve prostoperiodične veličine iste učestanosti

$a_1 = A_{m1} \cos(\omega t + \alpha_1)$ i $a_2 = A_{m2} \cos(\omega t + \alpha_2)$, njihova fazna razlika $\Delta\Phi$ je $\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = \omega t + \alpha_1 - (\omega t + \alpha_2) = \alpha_1 - \alpha_2$, predstavlja razliku njihovih početnih faza. Ukoliko je $\Delta\Phi > 0$, kaže se da a_1 prednjači u odnosu na a_2 za $\Delta\Phi$, odnosno da a_2 kasni u odnosu na a_1 za $\Delta\Phi$.



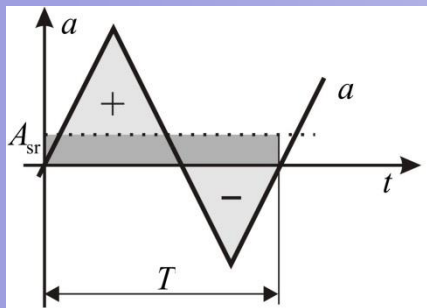
Srednja vrednost naizmenične struje

Srednja vrednost periodične veličine, A_{sr} jednaka je onoj stalnoj veličini koja u toku jedne periode omeđuje sa vremenskom osom istu površinu kao i periodična veličina.

Na osnovu ovoga je $A_{sr}T = \int_0^T a dt$ odnosno $A_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T a dt$.

Za slučaj kada su pozitivna i negativna poluperioda prostoperiodične veličine identične, srednja vrednost je jednaka nuli.

Određivanje srednje vrednosti naizmenične struje je važno iz praktičnih razloga za određivanje protekle količine elektriciteta.



Srednja vrednost promenjive struje u nekom vremenskom intervalu, od 0 do t je

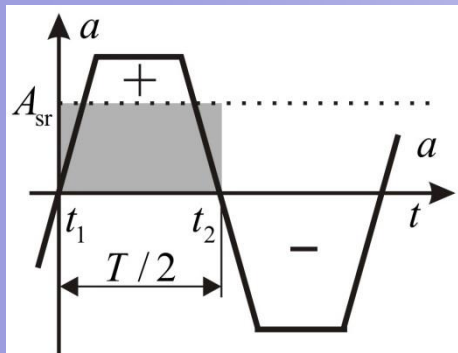
$$I_{sr} = \frac{1}{t} \int_0^t i dt.$$

Za periodične struje interval vremena je jedna perioda $t = T$ pa je onda

$$I_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T i dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_m \cos \omega t dt.$$

Srednja vrednost naizmenične struje

Imajući u vidu da je srednja vrednost u toku jedne periode jednaka nuli za slučaj kada su pozitivna i negativna poluperioda identične, ona se definiše na poluperiodi



$$I_{sr} = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} i \, dt = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} I_m \cos \omega t \, dt = \frac{2I_m}{\omega T} 2 \sin \frac{\omega T}{4}$$

kako je $\omega = 2\pi f \quad \rightarrow \quad I_{sr} = \frac{2I_m}{T} \frac{T}{2\pi} 2 \sin \frac{2\pi}{4} = \frac{2}{\pi} I_m$

Analogno ovome je i $E_{sr} = \frac{2}{\pi} E_m$ odnosno $U_{sr} = \frac{2}{\pi} U_m$.

Efektivna vrednost naizmenične struje

Vrednost naizmenične struje se stalno menja, u svakom trenutku je druga vrednost.

O jačini struje u bilo kom trenutku u praksi nema smisla govoriti.

Efektivna vrednost naizmenične struje jednaka je vrednosti stalne (jednosmerne) struje koja u istom vremenskom intervalu razvije na istom otporniku istu količinu toplote tj. obavi isti rad.

Ukupan rad naizmenične struje u toku jedne periode je $\int_0^T p dt = R \int_0^T i^2 dt$

i nakon izjednačavanja sa radom jednosmerne struje, dobija se $RI^2T = R \int_0^T i^2 dt$

odnosno $I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}$. Neka je $i = I_m \cos \omega t$ zamenom u prethodni izraz

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = I_m \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt} \rightarrow I = I_m \sqrt{\frac{1}{T} \frac{T}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Takode, } U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} \rightarrow U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt} \rightarrow E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

Idealni naponski i strujni generator

- Napon generatora jednak je elektromotornoj sili nezavisno od jačine struje generatora $u(t) = e(t)$.

- Ako je elektromotorna sila prostoperiodična funkcija vremena

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e) \text{ i napon je } u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

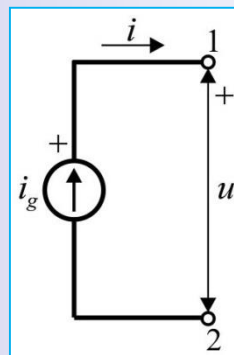
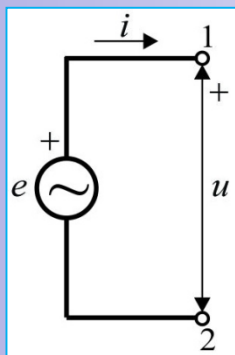
odnosno $U_m = E_m$, $\varphi = \varphi_e$.

- Struja u priključnicama generatora jednaka je struji generatora nezavisno od napona $i(t) = i_g(t)$.

- Ako je struja idealnog strujnog generatora prostoperiodična funkcija vremena

$$i_g(t) = I_{gm} \cos(\omega t + \varphi_g) \text{ i struja je } i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

odnosno $I_{gm} = I_m$, $\varphi_g = \varphi$.

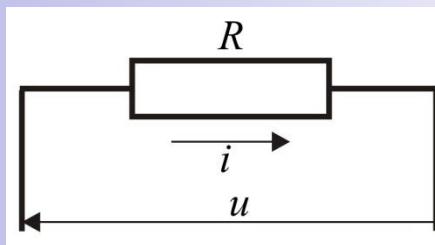


Pasivni elementi

- U kolima jednosmerne struje kao pasivni element pojavljivao se samo otpornik.
- Kalem i kondenzator su nakon završetka prelaznog režima predstavljali kratak spoj, odnosno prekid u kolu.
- U slučaju naizmenične struje, u kalemu se indukuje kontraelektromotorna sila (pojavljuje se napon na njemu) ➡ ne predstavlja kratki spoj.
- Naizmenična struja vrši naizmenično punjenje i pražnjenje kondenzatora ➡ održava se struja u grani i on nije prekid.

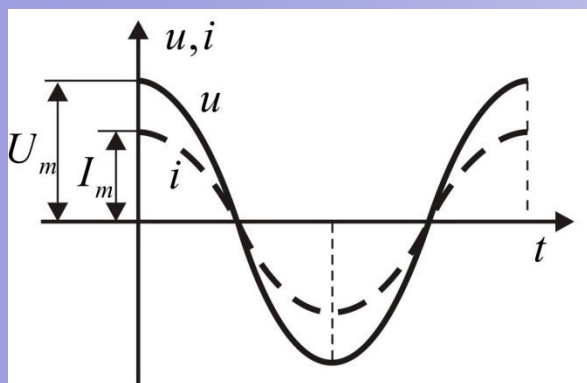
Otpornik

Ako otpornik otpornosti R , priključimo na generator naizmeničnog napona u , kroz njega će proticati struja $i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$ što će dovesti do pojave pada napona na otporniku.



Napon na krajevima otpornika u tom slučaju će biti:

$$u_R = Ri = RI_m \cos(\omega t + \varphi_i) = U_{mR} \cos(\omega t + \varphi_u).$$



Amplituda napona:

$$U_{mR} = RI_m$$

Početni fazni stav:

$$\varphi_u = \varphi_i$$



Napon na otporniku i struja kroz njega su u fazi.

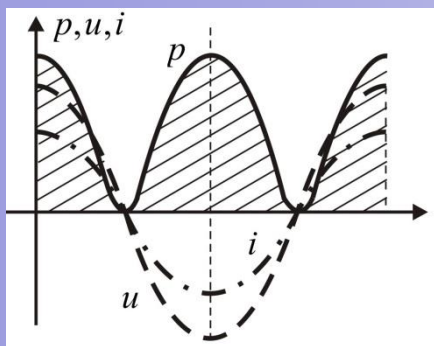
Otpornik – trenutna snaga

Neka je otpornik priključen na napon $u_R = U_{mR} \cos \omega t$. Kako je struja kroz otpornik u fazi sa naponom, kroz otpornik će proticati struja $i = I_m \cos \omega t$.

Trenutna snaga na otporniku je:

$$p = u_R i = U_{mR} I_m \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} U_{mR} I_m (1 + \cos 2\omega t)$$

Kod otpornika snaga je uvek $p \geq 0$, što znači da se na njemu tokom cele periode vrši rad. Ovaj rad je proporcionalan površini koju čine dijagram trenutne snage i vremenska osa (šrafirana oblast na slici).



Ovaj rad na otporniku se u potpunosti transformiše u toplotu i ne može se vratiti izvoru.

Otpornik nazivamo aktivnim ili termogenim elementom (potrošačem, prijemnikom).

Trenutna snaga osciluje sa učestanošću 2ω i amplitudom $\frac{1}{2} U_{mR} I_m$.

Trenutna snaga u toku jedne periode dva puta dostiže maksimum - kada je trenutna vrednost napona, odnosno struje maksimalna.

Kada je trenutna vrednost napona, odnosno struje jednaka nuli i trenutna vrednost snage je nula.

Srednja snaga

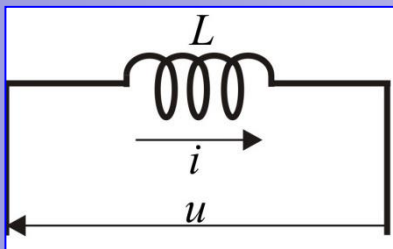
$$P = P_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{2} U_{mR} I_m$$

$$P = \frac{1}{2} U_{mR} I_m = \frac{1}{2} R I_m^2 = \frac{1}{2} \frac{U_{mR}^2}{R} = U_R I = R I^2 = \frac{U_R^2}{R}$$

Kalem

Kada kroz kalem induktivnosti L protiče struja $i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$ u njemu se indukuje kontraelektromotorna sila, shodno Faradejevom zakonu

$$e_i = -\frac{d\phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$



$$u_L = -e_i = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} [I_m \cos(\omega t + \varphi_i)] = -\omega L I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = \\ = \omega L I_m \cos(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

Amplituda napona:

$$U_{mL} = \omega L I_m = X_L I_m$$

Početni fazni stav:

$$\varphi_u = \varphi_i + \pi / 2$$



Napon na kalemu fazno prednjači u odnosu na struju kroz njega za $\pi / 2$.

$$X_L = \omega L I_m$$

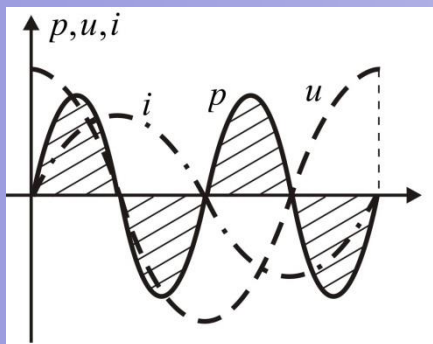
Po prirodi je otpornost i naziva se prividna otpornost ili reaktansa kalema.

Kalem – trenutna snaga

Neka je kalem priključen na napon $u_L = U_{mL} \cos \omega t$. Struja kroz njega fazno kasni za $\pi / 2$.

Trenutna snaga na kalemu je:

$$p = u_L i = U_{mL} I_m \cos \omega t \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = U_{mL} I_m \cos \omega t \sin \omega t = \frac{1}{2} U_{mL} I_m \sin 2\omega t$$



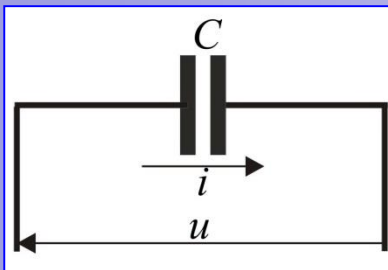
- Rad tokom prve četvrtine periode je pozitivan (šrafiranu oblast grafika) - generator vrši rad.
- Ovaj rad se pretvara u energiju magnetnog polja kalema.
- Tokom druge četvrtine, rad je negativan na kalemu - energija magnetnog polja kalema se vraća generatoru. Kalem se ponaša kao izvor, a generator kao potrošač.
- Ukupan rad generatora jednak je nuli.
- Energija samo šeta između generatora i kalema.

Kako je ukupan rad jednak nuli i srednja snaga je jednaka nuli.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{U_{mL} I_m}{2T} \int_0^T \sin 2\omega t dt = 0$$

Kondenzator

Napon na oblogama kondenzatora, predstavlja odnos količine naelektrisanja na oblogama kondenzatora i njegove kapacitivnosti C



$$u_c = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t + \varphi_i) =$$
$$= \frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t + \varphi_i - \frac{\pi}{2}) = U_{mC} \cos(\omega t + \varphi_u)$$

Amplituda napona:

$$U_{mC} = \frac{1}{\omega C} I_m = X_C I_m$$

Početni fazni stav:

$$\varphi_u = \varphi_i - \pi / 2$$



Napon na kondenzatoru fazno kasni u odnosu na struju kroz njega za $\pi / 2$.

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

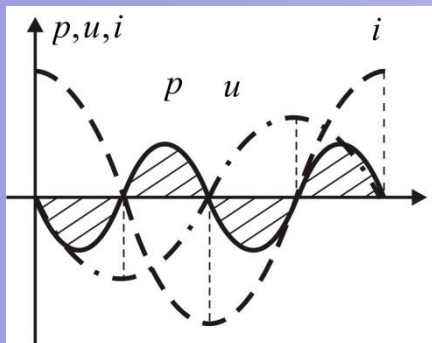
Prividna otpornost ili reaktansa kondenzatora.

Kondenzator – trenutna snaga

Neka je kondenzator priključen na napon $u_C = U_{mC} \cos \omega t$. Struja kroz njega fazno prednjači za $\pi / 2$.

Trenutna snaga na kalemu je:

$$p = u_C i = U_{mC} I_m \cos \omega t \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2} U_{mC} I_m \sin 2\omega t$$



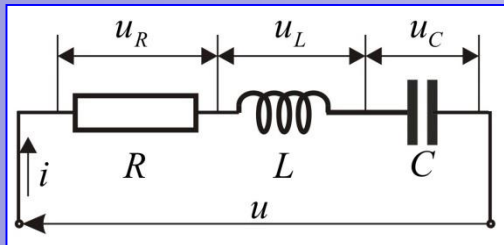
- Kao i kod kalema, tokom jedne četvrtine periode izvor puni kondenzator i vrši rad.
- U toku druge četvrtine periode kondenzator vraća energiju nazad izvoru i ponaša se kao izvor, a generator kao potrošač.

Ukupan rad tokom jedne periode jednak je nuli i srednja snaga je jednaka nuli.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{U_{mC} I_m}{2T} \int_0^T \sin 2(\omega t + \varphi_i) dt = 0$$

Redno RLC kolo

Neka su na red vezani otpornik otpornosti R , kalem induktivnosti L i kondenzator kapacitivnosti C i neka protiče struja $i = I_m \cos \omega t$. Jednačina dinamičke ravnoteže za ovakvo kolo je



$$u - Ri - L \frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

$$\begin{aligned} u &= u_R + u_L + u_C = RI_m \cos \omega t - \omega LI_m \sin \omega t + \frac{1}{\omega C} I_m \sin \omega t = \\ &= RI_m \cos \omega t - \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m \sin \omega t \end{aligned}$$

Kako je $u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) = U_m \cos \omega t \cos \varphi_u - U_m \sin \omega t \sin \varphi_u$

→ $U_m \cos \varphi_u = RI_m \quad U_m \sin \varphi_u = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m$

Iz prethodnih izraza veoma lako možemo dobiti izraze za amplitudu struje i ugao:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1 / \omega C)^2}}$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - 1 / \omega C}{R}$$

Redno RLC kolo

Količnik amplituda (kao i efektivnih vrednosti) napona i struje je po prirodi otpornost i naziva se impedansa. Označava se sa Z

Omov zakon:

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Iz ugla φ možemo lako odrediti karakter impendanse. Kako je

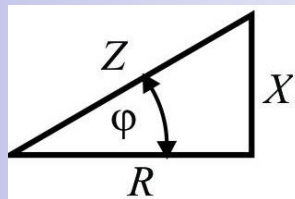
$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} = \arctg \frac{X}{R}$$

Kada je $X > 0$, argument impendanse je pozitivan ($0 < \varphi \leq \pi/2$) pa napon prednjači u odnosu na struju – impedansa je induktivnog karaktera.

Kada je $X < 0$, argument impendanse je negativan ($-\pi/2 \leq \varphi < 0$) pa napon kasni u odnosu na struju – impedansa je kapacitivnog karaktera.

Veza između impendanse Z , otpornosti R (rezistansa) i reaktanse X :

Trougao impendanse



$$R = Z \cos \varphi$$

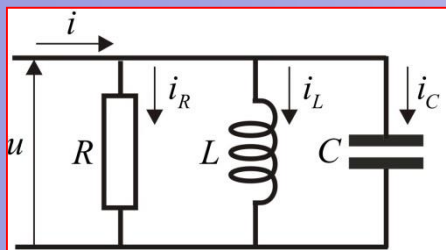
$$X = Z \sin \varphi$$

Paralelno RLC kolo

Neka su paralelno vezani otpornik otpornosti R , kalem induktivnosti L i kondenzator kapacitivnosti C i neka je napon $u = U_m \cos \omega t$.

Ukupna struja i ove paralelne veze biće:

$$i = i_R + i_L + i_C = I_{mR} \cos \omega t + I_{mL} \cos(\omega t - \pi / 2) + I_{mC} \cos(\omega t + \pi / 2)$$



$$\text{Amplitude} \left\{ \begin{array}{l} I_{mR} = U_m / R = GU_m \\ I_{mL} = U_m / \omega L = B_L U_m \\ I_{mC} = \omega C U_m = B_C U_m \end{array} \right. \quad \left| \quad \begin{array}{l} G = 1 / R \\ B_L = 1 / \omega L = 1 / X_L \\ B_C = \omega C = 1 / X_C \end{array} \right.$$

gde je G provodnost ili konduktansa, B_L i B_C susceptanse kalema i kondenzatora. Tada

$$\begin{aligned} i &= I_m \cos(\omega t + \varphi_i) = I_m \cos \omega t \cos \varphi_i - I_m \sin \omega t \sin \varphi_i = \\ &= GU_m \cos \omega t - \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) U_m \sin \omega t \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{array}{l} I_m \cos \varphi_i = GU_m \\ I_m \sin \varphi_i = \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) U_m \end{array} \right.$$

Iz prethodnih izraza veoma lako možemo dobiti izraze za amplitudu struje i ugao:

$$I_m = U_m \sqrt{G^2 + (\omega C - 1 / \omega L)^2}$$

$$\varphi_i = \arctg \frac{\omega C - 1 / \omega L}{G}$$

Paralelno RLC kolo

Količnik amplituda (kao i efektivnih vrednosti) struje i napona je po prirodi provodnost i naziva se admitansa. Označava se sa Y

Omov zakon

$$Y = \frac{I_m}{U_m} = \frac{I}{U} = \sqrt{G^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2} = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} = \sqrt{G^2 + B^2}$$

Iz ugla φ_Y možemo lako odrediti karakter admitanse. Kako je

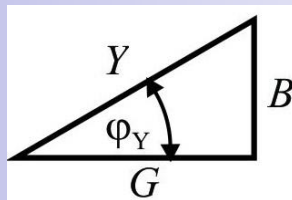
$$\varphi_Y = \arctg \frac{\omega C - 1/\omega L}{G} = \arctg \frac{B_C - B_L}{G} = \arctg \frac{B}{G}$$

Kada je $B > 0$, argument admitanse je pozitivan ($0 < \varphi_Y \leq \pi/2$) pa struja prednjači u odnosu na napon – admitansa je kapacitivnog karaktera.

Kada je $B < 0$, argument admitanse je negativan ($-\pi/2 \leq \varphi_Y < 0$) pa struja kasni u odnosu na napon – admitansa je kapacitivnog karaktera.

Veza između admitanse Y , konduktanse G i susceptanse B :

Trougao admitanse



$$G = Y \cos \varphi_Y$$

$$B = Y \sin \varphi_Y$$

Aktivna, reaktivna i prividna snaga

Neka je impedansa Z argumenta φ priključena na napon $u = U_m \cos \omega t$, struja će biti pomerena za ugao φ u odnosu na napon.

Trenutna snaga je: $p = u i = U_m I_m \cos \omega t \cos(\omega t - \varphi)$.

Nakon smene:

$$p = \frac{U_m I_m}{2} [\cos \varphi \cos(2\omega t - \varphi)] = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi (1 + \cos 2\omega t) + \frac{U_m I_m}{2} \sin \varphi \sin 2\omega t.$$

$$\text{Kako je: } U_m = Z I_m \quad Z \cos \varphi = R \quad Z \sin \varphi = X$$

$$p = \frac{1}{2} R I_m^2 (1 + \cos 2\omega t) + \frac{1}{2} X I_m^2 \sin 2\omega t$$

Prvi član u izraz predstavlja trenutnu snagu koja vrši aktivni rad na otpornosti impendanse.

Srednja vrednost ovog sabirka je jednaka konstantnom članu $R I_m^2 / 2$ i naziva se aktivna snaga

$$P = \frac{1}{2} R I_m^2 = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi = UI \cos \varphi.$$

Srednja vrednost drugog sabirka u poslednjem izrazu za snagu predstavlja reaktivnu snagu i definiše se kao

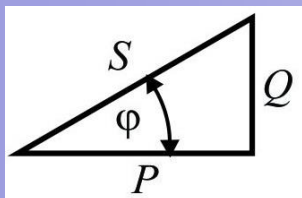
$$Q = \frac{1}{2} X I_m^2 = \frac{1}{2} U_m I_m \sin \varphi = UI \sin \varphi.$$

Iako je po dimenziji reaktivna snaga ista kao i aktivna snaga, njena jedinica je voltamper reaktivni i obeležava sa VAr.

Aktivna, reaktivna i prividna snaga

Možemo uočiti da izrazi za aktivnu i reaktivnu snagu predstavljaju katete pravouglog trougla

Trougao snage



$$P = S \cos \varphi$$

$$Q = S \sin \varphi$$

$$P^2 + Q^2 = \left(\frac{1}{2}U_m I_m \cos \varphi\right)^2 + \left(\frac{1}{2}U_m I_m \sin \varphi\right)^2 = \frac{1}{4}U_m^2 I_m^2.$$

Hipotenuza ovog trougla je takođe snaga i naziva se prividna snaga

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \frac{1}{2}U_m I_m = UI.$$

Prividna snaga je proizvod napona i struje, međutim da bi se razlikovala od aktivne i reaktivne snage, njena jedinica je voltamper VA.

Odnos aktivne i prividne snage naziva se faktor snage. Kod prostoperiodičnih struja ovaj odnos je kosinus ugla između napona i struje

$$\cos \varphi = P / S$$

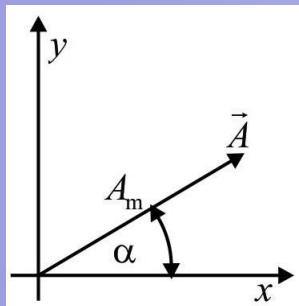
- Faktor snage kreće se u opsegu od nule, kod čisto reaktivnih opterećenja, pa do jedinice kod čisto otpornih opterećenja.
- Faktor snage je veoma značajan u energetici.
- Električni uređaji treba da imaju što veći faktor snage - za istu snagu uzimaju iz mreže manju struju.
- Faktor snage određuje kolikom prividnom snagom (strujom) potrošač opterećuje generator i napojne vodove da bi se na njemu razvila određena aktivna snaga.

Vektorsko predstavljanje prostoperiodičnih veličina

Vektorski metod nam omogućava da na jednostavan način dođemo do vrednosti za amplitudu i fazu u trenutku $t=0$.

U stvarnosti ne postoji vektor napona i struje već samo trenutne vrednosti.

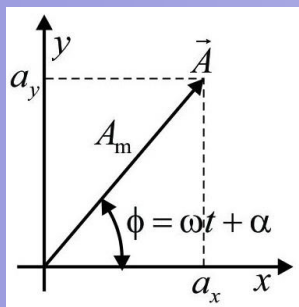
Neka je dat vektor $\vec{A}$ intenziteta A_m koji zaklapa ugao α sa x osom i čija je napadna tačka u koordinatnom početku. Neka u trenutku $t=0$ počne da rotira stalnom ugaonom brzinom ω .



Ugao koji u bilo kom trenutku zaklapa sa x osom je $\phi = \omega t + \alpha$ a njegova projekcija na x osu je $a_x = A_m \cos(\omega t + \alpha)$.

Ovaj izraz odgovara trenutnoj vrednosti prostoperiodične veličine

$$a = A_m \cos(\omega t + \alpha)$$



Trenutna vrednost prostoperiodične veličine a , amplitude A_m , kružne učestanosti ω i početnog faznog stava α jednaka je projekciji na x osu vektora $\vec{A}$ intenziteta A_m koji u trenutku $t=0$ zaklapa ugao α sa x osom i koji se obrće stalnom ugaonom brzinom ω .

Ovakav vektor se naziva vektorski predstavnik prostoperiodične veličine – fazor i obeležava $\underline{A}$. Apscisna osa $\rightarrow$ fazna osa.

Kompleksni predstavnici

Da bismo zadržali jednostavnost vektorskog rešavanja kola, uvodi se kompleksni račun.

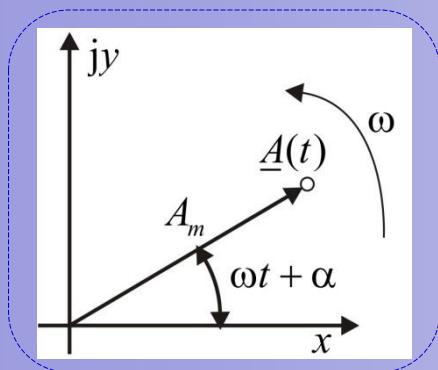
Svaki vektor možemo predstaviti jednim kompleksnim brojem u kompleksnoj ravni.

Intenzitet vektora u tom slučaju predstavlja moduo, dok ugao koji vektor zaklapa sa realnom osom, argument tog kompleksnog broja.

Ugao koji vektor zaklapa sa realnom osom se neprestano menja imajući u vidu da on obrće ugaonom brzinom $\omega \rightarrow$ menja se i argument kompleksnog broja $\rightarrow$ kompleksni broj moramo posmatrati kao vremenski zavistan.

Kompleksni predstavnici

Neka je dat kompleksni broj $\underline{A}(t) = A_m e^{j(\omega t + \alpha)} = A_m [\cos(\omega t + \alpha) + j \sin(\omega t + \alpha)]$



Realni deo ovog kompleksnog broja jednak je projekciji obrtnog vektora na x osu

$$\operatorname{Re}\{\underline{A}(t)\} = A_m \cos(\omega t + \alpha) = a_x$$

odnosno trenutnoj vrednosti prostoperiodične veličine

$$a = A_m \cos(\omega t + \alpha)$$

Lako je zaključiti da se trenutna vrednost prostoperiodične veličine može posmatrati kao kompleksni broj, čiji je moduo jednak amplitudi te veličine, a argument njenoj ukupnoj fazi

$$a = \operatorname{Re}\{\underline{A}(t)\} = \operatorname{Re}\{A_m e^{j(\omega t + \alpha)}\} = A_m \cos(\omega t + \alpha)$$

Osnovne operacije sa kompleksnim brojevima

Kompleksni broj	$\underline{z} = a + jb = \rho(\cos \varphi + j \sin \varphi) = \rho e^{j\varphi}$
Moduo	$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$
Argument	$\varphi = \arctg \frac{b}{a}, \quad a > 0$
Sabiranje i oduzimanje	$\underline{z}_1 \pm \underline{z}_2 = (a_1 + jb_1) \pm (a_2 + jb_2) = (a_1 \pm a_2) + j(b_1 \pm b_2)$
Proizvod	$\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1)$ $\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = \rho_1\rho_2 e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$
Količnik	$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{(a_1 + jb_1)}{(a_2 + jb_2)} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)}$ $= \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + j(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$
Konjugovano kompleksni broj	$\underline{z}^* = a - jb = \rho(\cos \varphi - j \sin \varphi) = \rho e^{-j\varphi}$
Sabiranje i oduzimanje konjugovanih	$\underline{z} + \underline{z}^* = (a + jb) + (a - jb) = 2a$ $\underline{z} - \underline{z}^* = (a + jb) - (a - jb) = 2jb$

Kompleksno predstavljanje struje i napona

Predstavljanje trenutne vrednosti prostoperiodične veličine u kompleksni oblik možemo iskoristiti za prikaz struje i napona na pasivnim elementima, otporniku, kalemu i kondenzatoru, u kompleksnom obliku.

Neka kroz pasivne elemente protiče struja $i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$. Njen kompleksni oblik je

$$\underline{I}(t) = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}.$$

Kako je napon na otporniku u fazi sa strujom koja kroz njega protiče

$$\underline{U}_R(t) = R \underline{I}(t) = R I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = U_{mR} e^{j(\omega t + \varphi_u)}$$

$$U_{mR} = R I_m$$

$$\varphi_u = \varphi_i$$

Za kalem $\underline{U}_L(t) = L \frac{d\underline{I}(t)}{dt} = L \frac{d}{dt} (I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}) = j\omega L I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = j\omega L \underline{I}(t) = jX_L \underline{I}(t)$

$$\underline{U}_L(t) = j\omega L I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \omega L I_m e^{j\pi/2} e^{j(\omega t + \varphi_i)} = U_{mL} e^{j(\omega t + \varphi_u)} \quad \left| \quad U_{mL} = \omega L I_m = X_L I_m \quad \varphi_u = \varphi_i + \pi / 2 \right.$$

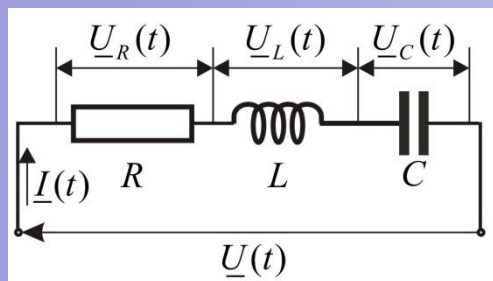
Za kondenzator $\underline{U}_C(t) = \frac{1}{C} \int \underline{I}(t) dt = \frac{1}{C} \int I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} dt = -j \frac{1}{\omega C} \underline{I}(t) = -jX_C \underline{I}(t)$

$$\underline{U}_C(t) = -j \frac{1}{\omega C} I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \frac{1}{\omega C} I_m e^{-j\pi/2} e^{j(\omega t + \varphi_i)} = U_{mC} e^{j(\omega t + \varphi_u)}$$

$$U_{mC} = \frac{1}{\omega C} I_m$$

$$\varphi_u = \varphi_i - \pi / 2$$

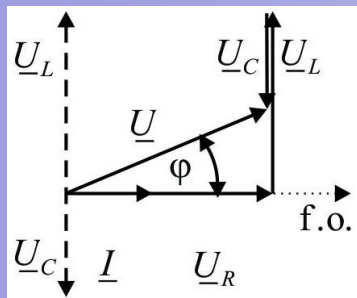
Kompleksna impedansa



$$\underline{U}(t) = \underline{U}_R(t) + \underline{U}_L(t) + \underline{U}_C(t) = R\underline{I}(t) + j(\omega L - 1/\omega C)\underline{I}(t)$$

Omov zakon

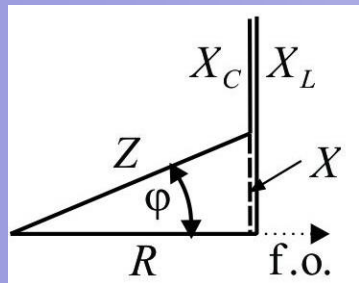
$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}(t)}{\underline{I}(t)} = R + j(\omega L - 1/\omega C) = R + j(X_L - X_C) = R + jX = Ze^{j\varphi_Z}$$



Moduo i argument kompleksne impendanse su

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$\varphi_Z = \varphi = \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} = \arctg \frac{X}{R}$$



$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = \frac{\underline{U}(t)}{\underline{I}(t)} = \frac{U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}}{I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$$

Kompleksna admitansa

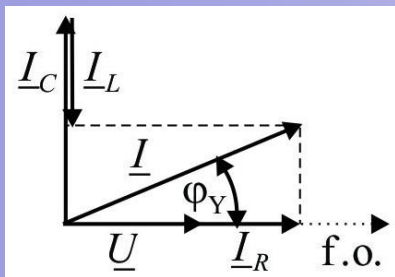
Neka je data paralelna veza otpornika, kalema i kondenzatora. Ukupna struja je

$$\underline{I}(t) = \underline{I}_R(t) + \underline{I}_L(t) + \underline{I}_C(t) = \left[\frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L}) \right] \underline{U}(t) = [G + j(B_C - B_L)] \underline{U}(t) = [G + jB] \underline{U}(t)$$

Omov zakon $\underline{Y} = \frac{\underline{I}(t)}{\underline{U}(t)} = \frac{1}{R} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L}) = G + j(B_C - B_L) = G + jB = Ye^{j\varphi_Y}$

Moduo i argument kompleksne admitanse su

$$Y = \sqrt{(1/R)^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2} = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} = \sqrt{G^2 + B^2}$$



$$\varphi_Y = \arctg \frac{\omega C - 1/\omega L}{1/R} = \arctg \frac{B_C - B_L}{G} = \arctg \frac{B}{G}$$

$$\underline{Y} = Ye^{j\varphi_Y} = \frac{\underline{I}(t)}{\underline{U}(t)} = \frac{I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)}}{U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}} = \frac{I_m}{U_m} e^{j(\varphi_i - \varphi_u)}$$

$$Y = \frac{I_m}{U_m} = \frac{I}{U}$$

$$\varphi_Y = \varphi_i - \varphi_u$$

Veza impedansa - admitansa

Kako su kompleksna impedansa i admitansa

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = \frac{\underline{U}(t)}{\underline{I}(t)} \quad \underline{Y} = Ye^{j\varphi_Y} = \frac{\underline{I}(t)}{\underline{U}(t)}$$

Očigledno je $\underline{Z} = 1/\underline{Y}$ i $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ odnosno $Y = 1/Z$ i $\varphi_Y = -\varphi$

Takođe je $\underline{Z} = R + jX$ i $\underline{Y} = G + jB$ odnosno

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} = G + jB$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}$$

$$B = -\frac{X}{R^2 + X^2}$$

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}$$

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{G + jB} = \frac{G}{G^2 + B^2} - j \frac{B}{G^2 + B^2} = R + jX$$

$$X = -\frac{B}{G^2 + B^2}$$

Vremenski nezavisni kompleksni predstavnici

Svaki od vremenski zavisnih kompleksnih predstavnika može se napisati kao

$$\underline{A}_k(t) = A_{mk} e^{j(\omega t + \alpha_k)} = A_{mk} e^{j\omega t} e^{j\alpha_k} = \underline{A}_k e^{j\omega t} \quad \text{gde je}$$

$$\underline{A}_k = A_{mk} e^{j\alpha_k} = A_{mk} (\cos \alpha_k + j \sin \alpha_k)$$

Kompleksni broj kojim je određena amplituda i početni fazni stav prostoperiodične veličine a_k .

Kompleksni broj, $\underline{A}_k$, naziva se *vremenski nezavisnim kompleksnim predstavnikom prostoperiodične veličine* a_k (ili samo kompleksni predstavnik).

Trenutne vrednosti $\leftrightarrow$ kompleksni predstavnici

$$e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e) \Rightarrow \underline{E} = E_m e^{j\varphi_e}$$

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) \Rightarrow \underline{U} = U_m e^{j\varphi_u}$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \Rightarrow \underline{I} = I_m e^{j\varphi_i}$$

za otpornik: $\underline{U}_R = R \underline{I} = \underline{I} / G$

$$\underline{I}_R = G \underline{U} = \underline{U} / R$$

za kalem: $\underline{U}_L = j X_L \underline{I} = j \underline{I} / B_L$

$$\underline{I}_L = -j B_L \underline{U} = -j \underline{U} / X_L$$

za kondenzator: $\underline{U}_C = -j X_C \underline{I} = -j \underline{I} / B_C$

$$\underline{I}_C = j B_C \underline{U} = j \underline{U} / X_C$$

za impedansu: $\underline{U}_Z = \underline{Z} \underline{I} = \underline{I} / \underline{Y}$

$$\underline{I}_Z = \underline{U} / \underline{Z} = \underline{Y} \underline{U}$$

Neka je data prostoperiodična veličina $a(t) = A_m \cos(\omega t + \alpha)$ i neka je dat vremenski zavisna kompleksna veličina $\underline{A}(t) = A_m e^{j(\omega t + \alpha)} = A_m [\cos(\omega t + \alpha) + j \sin(\omega t + \alpha)]$

Pokazali smo da je $a = \text{Re}\{\underline{A}(t)\} = \text{Re}\{A_m e^{j(\omega t + \alpha)}\} = A_m \cos(\omega t + \alpha)$.

Trenutne vrednosti $\leftrightarrow$ kompleksni predstavnici

Povratak iz kompleksnog oblika na trenutnu vrednost:

$$\underline{A} = A_m e^{j\alpha} \cdot e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{A}(t) = \underline{A} e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow a = \operatorname{Re}\{\underline{A}(t)\} = \operatorname{Re}\{A_m e^{j\alpha} e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{A_m e^{j(\omega t + \alpha)}\} = A_m \cos(\omega t + \alpha)$$

$$A_m = \sqrt{\operatorname{Re}^2\{\underline{A}\} + \operatorname{Im}^2\{\underline{A}\}}$$
$$\alpha = \operatorname{arctg}(\operatorname{Im}\{\underline{A}\} / \operatorname{Re}\{\underline{A}\})$$

Kompleksni predstavnici mogu da se definišu i preko efektivnih vrednosti

$$\underline{A}_k = A_k e^{j\alpha_k} = A_k (\cos \alpha_k + j \sin \alpha_k)$$

$$\underline{A}_k(t) = \underline{A}_k e^{j\omega t} = A_k e^{j(\omega t + \alpha_k)} = A_k e^{j\omega t} e^{j\alpha_k}$$

$$\Rightarrow a = \operatorname{Re}\{\sqrt{2}\underline{A}(t)\} = \operatorname{Re}\{\sqrt{2}A e^{j(\omega t + \alpha)}\} = \sqrt{2}A \cos(\omega t + \alpha) = A_m \cos(\omega t + \alpha)$$

Trenutne vrednosti $\leftrightarrow$ kompleksni predstavnici

Neka je data trenutna vrednost napona kao:

$$u(t) = 6 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) = 6 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) \text{ (V)}$$

Maksimalna vrednost:

$$U_m = 6 \text{ (V)}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{2\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$$

$$\underline{U} = 6e^{-j\frac{\pi}{3}} \text{ (V)} = 3(1 - j\sqrt{3}) \text{ V}$$

$$\underline{U} = 3(1 - j\sqrt{3}) \text{ V}$$

$$U_m = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{-3\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$u = 6 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ (V)}$$

Efektivna vrednost:

$$U_{eff} = U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \text{ (V)}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{2\pi}{6} = -\frac{\pi}{3}$$

$$\underline{U} = 3\sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{3}} \text{ (V)} = \frac{3}{2}(\sqrt{2} - j\sqrt{6}) \text{ V}$$

$$\underline{U} = \frac{3}{2}(\sqrt{2} - j\sqrt{6}) \text{ V}$$

$$U = \sqrt{\left(3\sqrt{2}/2\right)^2 + \left(3\sqrt{6}/2\right)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\varphi = \arctg\left(\frac{-3\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$u = \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) = 6 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ (V)}$$

Osnovni pojmovi i zakoni

Omov zakon

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}, \underline{U} = \underline{Z} \underline{I}, \underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$$

Omov zakon
za prosto kolo

$$\underline{I} = \frac{\sum \underline{E}}{\sum \underline{Z}}$$

Složena grana

$$\underline{U}_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \sum \underline{Z} \underline{I} - \sum \underline{E}$$

I Kirhofov
zakon

$$\sum \underline{I} = 0$$

II Kirhofov
zakon

$$\sum \underline{Z} \underline{I} = \sum \underline{E} \text{ ili } \sum \underline{U} = 0$$

Redna veza

$$\underline{Z}_e = \sum_{n=1}^N \underline{Z}_n \text{ ili } \frac{1}{\underline{Y}_e} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\underline{Y}_n}$$

Paralelna veza

$$\frac{1}{\underline{Z}_e} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\underline{Z}_n} \text{ ili } \underline{Y}_e = \sum_{n=1}^N \underline{Y}_n$$

Kompleksna snaga

Iz trougla impedanse: $R = Z \cos \varphi$ i $X = Z \sin \varphi$

$$\underline{Z} = R + jX = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi \quad \bigg/ \quad \cdot I_m^2 / 2 = |\underline{I}|^2 / 2$$

Kompleksna snaga

$$\underline{S} = \frac{1}{2} \underline{Z} |\underline{I}|^2 = \frac{1}{2} \underline{Z} \underline{I} \underline{I}^* = \frac{1}{2} \underline{U} \underline{I}^* = P + jQ$$

($\underline{I}^*$ - konjugovana vrednost kompleksne struje)

Kako je $P = \operatorname{Re}\{\underline{S}\}$ i $Q = \operatorname{Im}\{\underline{S}\}$, prividna snaga jednaka je modulu kompleksne snage

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{\operatorname{Re}^2\{\underline{S}\} + \operatorname{Im}^2\{\underline{S}\}} = |\underline{S}|$$

Za idealne generatore:

$$\underline{S}_E = \frac{1}{2} \underline{E} \underline{I}^* \quad \underline{S}_J = \frac{1}{2} \underline{U}_J \underline{J}^*$$

Za generator:

$$\underline{S}_g = \frac{1}{2} \underline{U}_g \underline{I}_g^*$$

Zbir kompleksnih snaga svih generatora u jednom kolu jednak je zbiru kompleksnih snaga svih potrošača

$$\sum \underline{S}_{\text{generatora}} = \sum \underline{S}_{\text{potrošača}}$$

Važi:

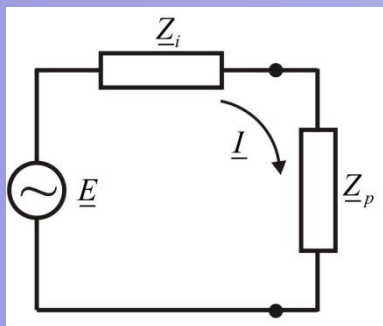
$$\sum P_{\text{generatora}} = \sum P_{\text{potrošača}}$$

$$\sum Q_{\text{generatora}} = \sum Q_{\text{potrošača}}$$

Prilagođenje prijemnika na generator

- Prilagođenje prijemnika na generator predstavlja nalaženje uslova pri kojima prijemnik može maksimalno da optereti generator aktivnom snagom.
- Za prijemnik se kaže da je prilagođen na generator u slučaju kada se na njemu razvija maksimalna aktivna snaga.
- Uslov koji mora da zadovolji impedansa prijemnika naziva se uslov prilagođenja.

Neka je na generator elektromotorne sile $\underline{E}$ i unutrašnje impedanse $\underline{Z}_i$ priključen prijemnik impedanse $\underline{Z}_p$.



$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_p} = \frac{\underline{E}}{(R_i + R_p) + j(X_i + X_p)}$$

Na otpornosti prijemnika razvija se snaga

$$P = \frac{1}{2} R_p |\underline{I}|^2 = \frac{1}{2} \frac{|\underline{E}|^2 R_p}{(R_i + R_p)^2 + (X_i + X_p)^2}$$

Maksimalna snaga se dobija iz $\frac{\partial P(R_p, X_p)}{\partial R_p} = 0$ i $\frac{\partial P(R_p, X_p)}{\partial X_p} = 0$

Rešenja izvoda su
 $R_p = R_i$, $X_p = -X_i$

Maksimalna snaga na prijemniku

$$P_{\max} = \frac{E^2 R_p}{(R_i + R_p)^2} = \frac{E^2}{4R_i}$$

U slučaju prilagođenja po snazi aktivna snaga prijemnika jednaka je polovini aktivne snage generatora. Druga polovina snage generatora transformisala se u Džulove gubitke na njegovoj unutrašnjoj impedansi.

Rezonantno kolo

Kod redne veze dva ili više reaktivnih elemenata može da nastupi poseban slučaj koji je poznat kao naponska rezonansa. Tada je njihova ekvivalentna impedansa jednaka nuli.

Ako posmatramo rednu vezu otpornika, kalema i kondenzatora, impedansa ovakvog kola je

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1 / \omega C)^2} \qquad I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1 / \omega C)^2}}$$

Za određenu vrednost kružne učestanosti ω , može da nastupi poseban slučaj kada je reaktansa kalema jednaka reaktansi kondenzatora $\omega L = 1 / \omega C$, pa je ukupna reaktansa kola jednaka nuli $X = 0$ a impedansa kola samo otpornosti $Z = R$

U tom slučaju kroz kolo protiče maksimalna struja $I_0 = I_{\max} = U / R$ i u fazi je sa naponom.

Naponi na kondenzatoru i kalemu su jednaki po vrednosti, a suprotni po fazi. Poništavaju se i ne utiču na struju kroz kolo. U tom slučaju se kaže da je u kolu nastupila rezonansa.

Struja kroz kolo u rezonansi je velika, pa naponi na reaktivnim elementima mogu da dostignu visoke vrednosti, ne retko više desetina ili stotina puta veće od priključenog napona, zbog čega se ova pojava često naziva naponska rezonansa.

Rezonantno kolo

Iz uslova jednakosti reaktansi kalema i kondenzatora $\omega L = 1 / \omega C$ nalazi se kružna rezonantna učestanost $\omega = \omega_0$

$$\omega_0 L = 1 / \omega_0 C \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = 1 / \sqrt{LC} \quad \text{odnosno} \quad f_0 = 1 / 2\pi\sqrt{LC}$$

Ova učestanost se još naziva sopstvena ili prirodna učestanost rezonantnog kola.

Da bi u kolu nastupila rezonansa generator mora da ima učestanost jednaku sopstvenoj učestanosti rezonantnog kola $f = f_0$

$$U_R = I_0 R = U \quad U_L = U_C = \frac{\omega_0 L}{R} U = \frac{1}{\omega_0 RC} U$$

Odnos napona na jednom od reaktivnih elemenata i priključenog napona pri rezonansi naziva se faktorom dobrote rezonantnog kola i obeležava slovom Q

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

Kako su gubici kod kalema mnogo veći nego kod kondenzatora, često se govori o faktoru dobrote kalema umesto celog rezonantnog kola.

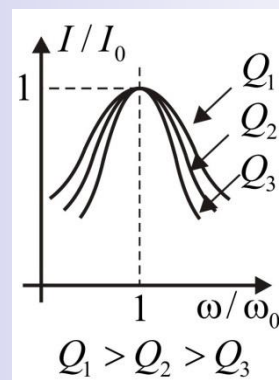
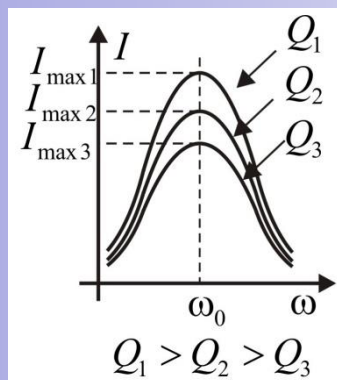
Maksimalna vrednost struje u rezonantnom kolu, pri stalnom priključenom naponu, zavisice od otpornosti R , odnosno od faktora dobrote kola Q .

Rezonantno kolo

Promene struje u rezonantnom kolu u funkciji učestanosti nazivaju se krive rezonanse ili rezonantne krive.

Za analizu, daleko je pogodnije koristiti univerzalne krive rezonanse.

Kod univerzalnih kriva rezonanse normalizovanje se vrši prema struji u rezonansi.



Odnos napona na jednom od reaktivnih elemenata i priključenog napona pri rezonansi naziva se faktorom dobrote rezonantnog kola i obeležava slovom Q

$$\frac{I}{I_0} = \frac{U}{Z} \frac{R}{U} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

Reaktansa kola

$$\omega L - 1/\omega C = \omega_0 L \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 \omega LC} \right) = \omega_0 L \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \omega_0 L s$$

Razdešenost
rezonantnog kola

$$s = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}$$

Rezonantno kolo

Konačno odnos struja je

$$\frac{I}{I_0} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega_0 L s)^2}} = \frac{R}{R\sqrt{1 + (\omega_0 L / R)^2 s^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 s^2}}$$

$$s = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega\omega_0} = \frac{(\omega + \omega_0)(\omega - \omega_0)}{\omega\omega_0}$$

$$\omega = \omega_0, \quad \omega + \omega_0 \approx 2\omega_0, \quad \omega\omega_0 \approx \omega_0^2, \quad \omega - \omega_0 \approx \Delta\omega \quad \rightarrow$$

Odstupanje od rezonantne učestanosti - disonanca

Kada je $\omega = \omega_0 \Rightarrow$ disonanca je 0, kolo je u rezonansi pa je odnos struja

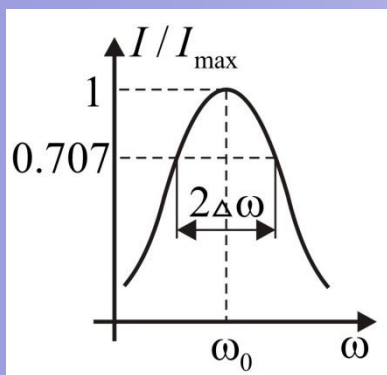
$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2Q\Delta\omega/\omega_0)^2}}$$

Što je faktor dobrote kola veći kriva rezonanse je oštija.

Rezonantno kolo – propusni opseg

Najvažnijih karakteristika rezonantnog kola jeste propusni opseg koji se označava sa $2\Delta\omega$.

Propusni opseg rezonantnog kola je spektar učestanosti oko rezonantne učestanosti pri kojima struja u kolu ne opadne na vrednost manju od $0.707 I_0$ ili $I_0 / \sqrt{2}$, pri čemu je I_0 struja kroz kolo u rezonansi.



Odnos I / I_0 je tako odabran da snaga pri učestanosti na granici propusnog opsega opadne na polovinu od snage pri rezonansi, $P = I^2 R$

Kako je već rečeno, propusni opseg tj. kriva rezonanse je šira ukoliko je faktor dobrote manji. Između širine propusnog opsega i faktora dobrote rezonantnog kola postoji bliska veza.

Iz odnosa $I / I_0 = 1 / \sqrt{2}$ sledi da je $2Q\Delta\omega/\omega_0 = 1$

Za širinu propusnog opsega dobijamo

$$2\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

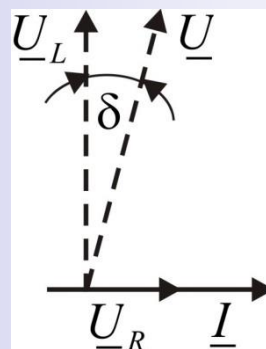
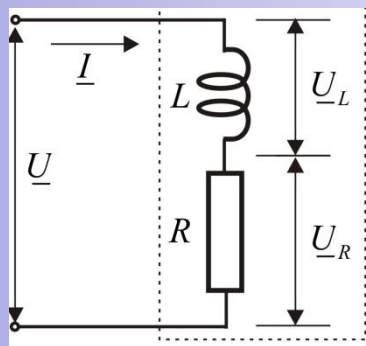
Što je faktor dobrote kola veći propusni opseg kola je manji pa se kaže da je kolo selektivnije.

Realni pasivni elementi - kalem

Kod realnih kalemova i kondenzatora figurišu izvesni parametri koje nije moguće zanemariti kao kod idealnih kalemova i kondenzatora.

Žica od koje se izrađuje kalem ima izvesnu otpornost koja se ne može zanemariti u odnosu na reaktansu kalema, pogotovu na nižim učestanostima.

U ekvivalentnoj šemi kalema ova parazitna otpornost se vezuje na red sa kalemom.



Kod idealnog kalema napon u odnosu na struju prednjači za $\pi / 2$.

Kod realnog kalema (dijagram) prednjači za neki manji ugao $\pi / 2 - \delta$.

Mera kvaliteta kalema definiše se kao tangens ugla δ , tj. kao odnos aktivne i reaktivne komponente napona ove redne veze

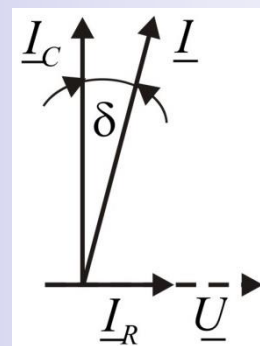
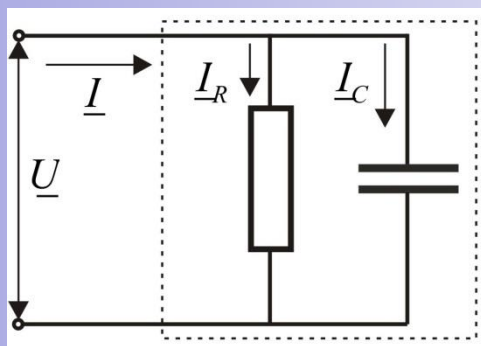
$$\operatorname{tg} \delta = \frac{U_R}{U_L} = \frac{R}{\omega L} = \frac{1}{Q}$$

Ukoliko je tangens gubitaka manji kalem je kvalitetniji jer su manji Džulovi gubici u njemu.

Realni pasivni elementi - kondenzator

Kod realnog kondenzatora ma kako bio kvalitetan dielektrik, on poseduje izvesnu otpornost koja je naročito izražena pri visokim učestanostima.

Ovi gubici u dielektriku kondenzatora definišu se kao parazitna otpornost i u ekvivalentnoj šemi kondenzatora predstavljaju se otpornikom koji se vezuje paralelno kondenzatoru.



Kod realnog kondenzatora, po analogiji sa kalemom, struja će prednjačiti u odnosu na napon za ugao $\pi/2 - \delta$.

Mera kvaliteta kondenzatora definiše se kao tangens ugla δ , tj. kao odnos aktivne i reaktivne komponente struje (struje kroz otpornik i struje kroz idealni kondenzator).

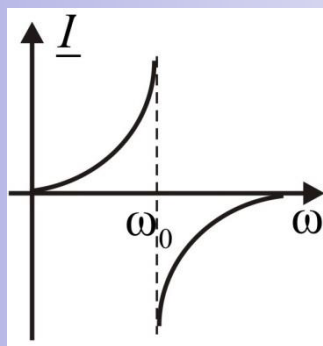
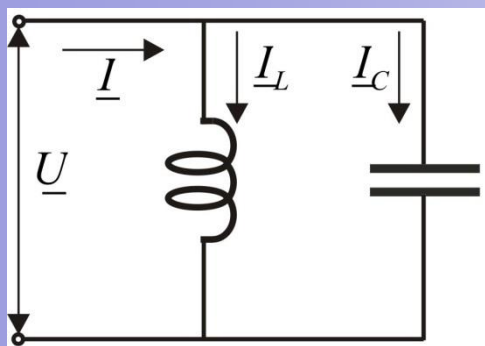
$$\operatorname{tg} \delta = \frac{I_R}{I_C} = \frac{1}{\omega RC} = \frac{1}{Q}$$

Za kvalitetan dielektrik u kondenzatoru tangens ugla gubitaka je veoma mali pa je

$$\operatorname{tg} \delta \approx \delta$$

Antirezonantno ili zaptivno kolo

Paralelna veza kalema i kondenzatora obrazuje antirezonantno kolo ili zaptivno kolo. Ovo kolo odlikuje se potpuno različitim karakteristikama u odnosu na rezonantno kolo.



$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_L \underline{Z}_C}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{L / C}{j(\omega L - 1 / \omega C)} = j \frac{L / C}{1 / \omega C - \omega L}$$

Impedansa ove veze ima samo reaktansu, tj. zavisi samo od reaktanse kalema i kondenzatora. Za određenu učestanost izvora reaktanse kalema i kondenzatora postaju jednake, $\omega L = 1 / \omega C$, pa je ukupna reaktansa kola, a samim tim i impedansa beskonačno velika.

Ova pojava je potpuno suprotna nego kod rezonantnog kola gde je impedansa bila jednaka nuli, zato ovu pojavu nazivamo antirezonansa.

U slučaju antirezonanse struja ne protiče kroz kolo pa se ovo kolo zove još i zaptivno kolo.

Za učestanosti manje od antirezonantne kolo se ponaša kao kalem jer je reaktansa pozitivna, dok za učestanosti veće od antirezonantne, reaktansa je negativna pa se kolo ponaša kao kondenzator.

Polifazni sistem

Do sada smo razmatrali generatore koji su bili izvori samo jedne elektromotorne sile i koji imaju samo dva pristupna kraja.

Takvi generatori se nazivaju monofazni ili jednofazni generatori.

Poznato je da se prostoperiodična elektromotorna sila indukuje u navojku (kalemu) koji se obrće u homogenom magnetnom polju.

Skup više električnih kola sa elektromotornim silama istih učestanosti koje su fazno pomerene jedna u odnosu na drugu, naziva se polifazni ili višefazni sistem.

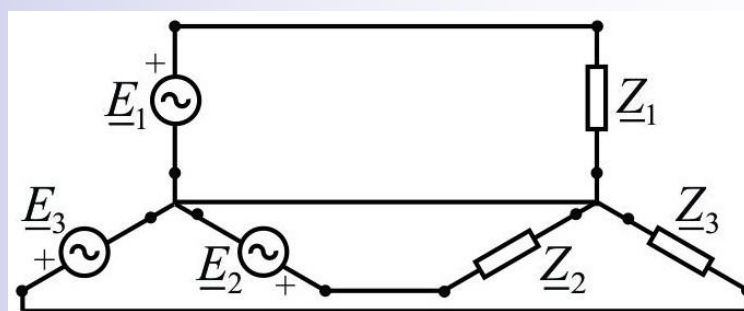
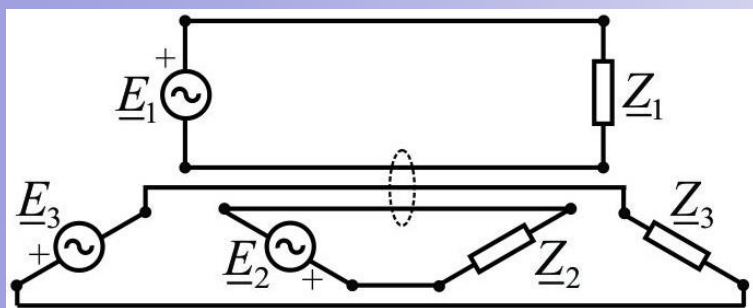
Generatori koji imaju više pristupnih krajeva nazivaju se polifazni ili višefazni generatori.

Svaki od pristupnih krajeva generatora u datom trenutku nalazi se na različitom potencijalu u odnosu na neku referentnu tačku.

Trofazni sistem

U energetici se koristi trofazni sistem kao predstavnik polifaznog sistema.

Ovakav sistem omogućava ekonomičan prenos električne energije i veoma jednostavno generisanje obrtnog magnetnog polja – osnove za rad najvećeg broja elektromotora.



Tri potrošača određene snage se napajaju sa tri generatora.

Potrebno je ukupno šest provodnika određenog poprečnog preseka.

Tri povratna provodnika (zaokružena na slici) se mogu spojiti u jedan.

U slučaju jednosmerne struje, kroz povratni provodnik bi proticala struja koja je jednaka zbiru struja kroz sva tri potrošača – potreban je provodnik većeg poprečnog preseka.

Isto važi i za efektivne vrednosti naizmeničnih struja ukoliko su elektromotorne sile sva tri generatora bile u fazi i impedanse potrošača međusobno jednake.

Trofazni sistem

Ako su elektromotorne sile generatora međusobno fazno pomerene i struje će biti fazno pomerene.

Kroz povratni provodnik protiče struja čija je efektivna vrednost manja od zbira efektivnih vrednosti pojedinih struja – mogućnost smanjenja poprečnog preseka povratnog provodnika.

Ako su elektromotorne sile sva tri generatora jednakih efektivnih vrednosti i međusobno fazno pomerene za $2\pi/3$, kao i da su sve impedanse međusobno jednake, struja kroz povratni provodnik je jednaka nuli.

Povratni provodnik nije potreban i može se izbaciti.

Za prenos iste snage potrebna su, umesto šest, samo tri provodnika.

Trofazni sistem možemo posmatrati kao skup tri elektromotorne sile istih efektivnih vrednosti i učestanosti, a fazno pomenih jedne u odnosu na drugu za $2\pi/3$.

Ovaj sistem se može dobiti pomoću tri identična namotaja međusobno učvršćenih i pomenih u prostoru za $2\pi/3$.

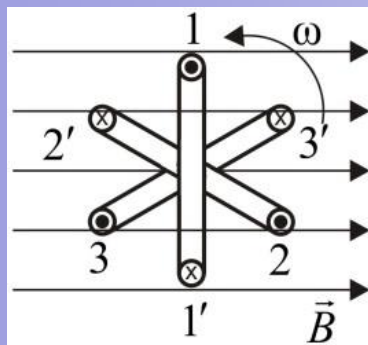
Trofazni sistem

Kada se ovakav sistem obrće u homogenom magnetnom polju stalnom ugaonom brzinom ω u namotajima će se indukovati elektromotorne sile

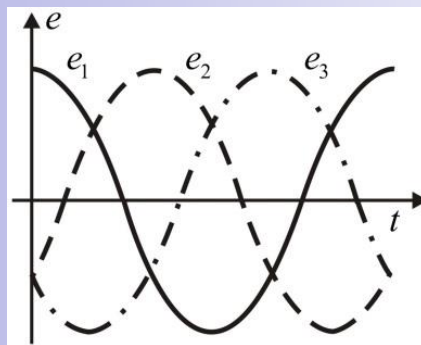
$$e_1 = E_m \cos \omega t$$

$$e_2 = E_m \cos(\omega t - 2\pi / 3)$$

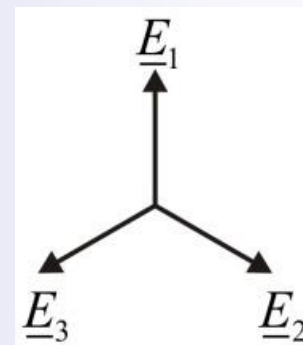
$$e_3 = E_m \cos(\omega t - 4\pi / 3)$$



Slika 1



Slika 2



Slika 3

Svaki od ovih namotaja predstavlja poseban monofazni generator, kroz koje protiču struje istog intenziteta međusobno fazno pomerene za $2\pi / 3$.

Trofazni sistem

Trofazni sistem je prikazan kao spoj tri posebna generatora (slika 1).

Ako se povratni vodovi sva tri generatora spoje u jedan zajednički, kroz povratni ili neutralni vod protiče struja $i_0 = i_1 + i_2 + i_3$.

Kod potpuno simetričnog opterećenja gde su sve impendanse prijemnika jednake ova struja je jednaka nuli, što se vidi sa fazorskog dijagrama (slika 3).

Kod ovakvog sistema povratni provodnik nije potreban što uprošćava sistem i umesto šestožičnog imamo trožični sistem.

Namotaji trofaznog generatora mogu da se vežu na određene načine zbog pogodnosti i ekonomičnosti u eksploataciji.

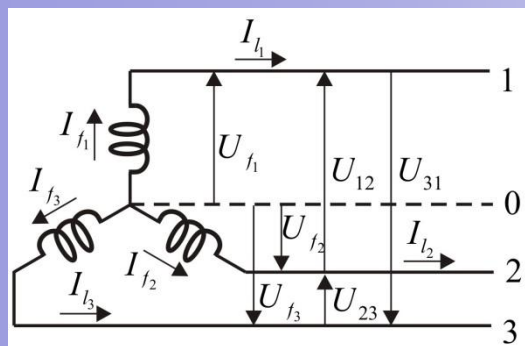
Ako su krajevi namotaja generatora spojeni u jednu tačku koja se naziva zvezdište ili nulta tačka, takva veza se naziva veza u zvezdu.

Drugi način vezivanja namotaja generatora jeste vezivanje u trougao.

Trofazni sistem – veza u zvezdu

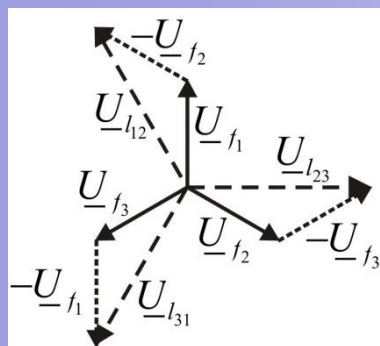
Kod veze u zvezdu, zvezdište se obično uzemljuje i sa njega se može, ali i ne mora voditi nulti vod.

Provodnici koji se vode sa preostalih krajeva generatora nazivaju se fazni provodnici ili faze.



Napon između bilo kog faznog i nultog provodnika jednak je naponu na odgovarajućem generatoru i naziva se fazni napon, U_f . Napon između bilo koja dva fazna provodnika naziva se linijski napon, U_l .

Analogno ovome, struja koja protiče kroz namotaj generatora naziva se faznom strujom, I_f , a struja kroz bilo koji od faznih provodnika linijskom strujom, I_l .



Linijska struja jednaka je faznoj struji.

Sa fazorskog dijagrama takođe možemo uočiti da je linijski napon $\sqrt{3}$ puta veći od faznog, pa na osnovu ovoga možemo izvesti sledeći zaključak za vezu u zvezdu

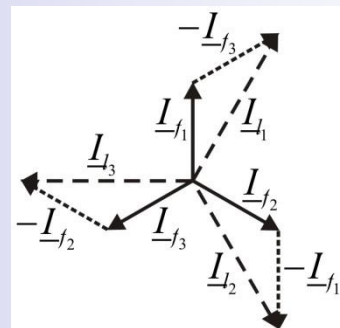
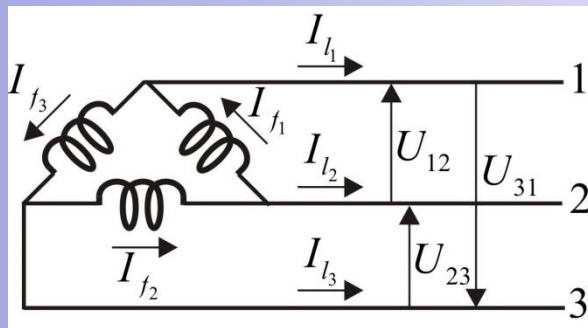
$$I_l = I_f$$

$$U_l = \sqrt{3}U_f$$

Trofazni sistem – veza u trougao

Kod vezivanja u trougao namotaji generatora vezuju se redno, početak prve za kraj druge faze, početak druge za kraj treće i početak treće za kraj prve faze.

Ako nema spoljašnjeg opterećenja struja kroz ovako zatvoreno kolo neće teći jer je zbir elektromotornih sila jednak nuli, $\underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3 = 0$.



Kod veze u trougao linijski napon je jednak faznom naponu, a linijska struja je $\sqrt{3}$ puta veća od fazne struje.

$$U_l = U_f$$

$$I_l = \sqrt{3} I_f$$

Trofazni sistem

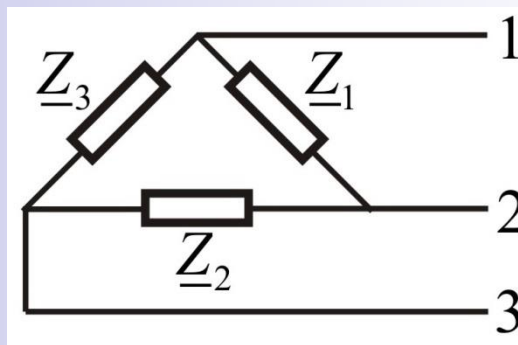
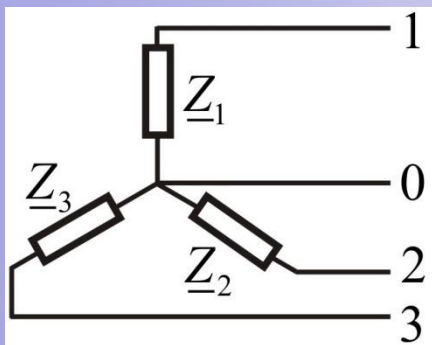
Kako potrošač koji se vezuje na trofazni sistem vidi samo linijske napone, kod veze generatora u zvezdu sa nultim provodnikom na trofazni sistem se mogu priključivati i monofazni potrošači.

Oni se priključuju između jedne od faza i nultog provodnika.

Tipični primer jeste većina uređaja u domaćinstvu.

Uobičajeno je da se ovakav niskonaponski trofazni sistem obeležava kao 3x380/220V, pri čemu je linijski napon 380V, a fazni napon 220V.

Kako se trofazni potrošač sastoji iz tri impendanse, on se može vezati i u zvezdu i u trougao kako je prikazano



Trofazni sistem - snaga

Bez obzira da li se radi o vezi u zvezdu ili trougao, ukupna kompleksna snaga trofaznog sistema jednaka je zbiru snaga na pojedinim impedansama.

Kod veze u zvezdu za simetrični potrošač, prividna snaga na jednoj impedansi je

$$S = U_f I_f = \frac{U_l}{\sqrt{3}} I_l.$$

Kod veze u trougao prividna snaga na jednoj impedansi je

$$S = U_f I_f = U_l \frac{I_l}{\sqrt{3}}.$$

Kao što vidimo, bez obzira na način povezivanja ukupna prividna snaga trofaznog simetričnog potrošača je

$$S = 3S_1 = 3U_f I_f = \sqrt{3}U_l I_l$$

pri čemu su aktivna i reaktivna snaga

$$P = 3P_1 = \sqrt{3}U_l I_l \cos \varphi$$

$$Q = 3Q_1 = \sqrt{3}U_l I_l \sin \varphi$$

Za slučaj nesimetričnog potrošača ovi izrazi ne važe.

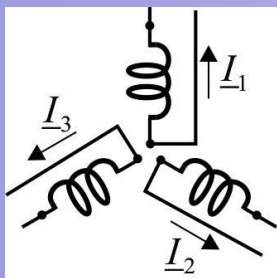
Obrtno magnetno polje

Obrtno magnetno polje je magnetno polje kod koga se vektor magnetne indukcije obrće stalnom ugaonom brzinom ω – Teslino obrtno polje.

Kroz prostorno pomerene namotaje se propuštaju vremenski pomerene prostoperiodične struje.

Najčešće korišćeno je trofazno obrtno magnetno polje.

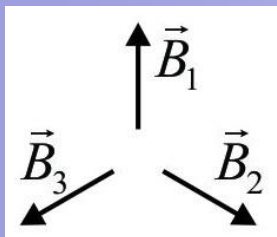
Data su tri navojka međusobno prostorno pomerena za $2\pi/3$ i kroz koje protiču prostoperiodične struje fazno pomerene za $2\pi/3$.



$$i_1 = I_m \cos \omega t$$

$$i_2 = I_m \cos(\omega t - 2\pi/3)$$

$$i_3 = I_m \cos(\omega t + 2\pi/3)$$



Svaka od ovih struja stvara prostoperiodično magnetno polje koje je u fazi sa njom

$$B_1 = B_m \cos \omega t$$

$$B_2 = B_m \cos(\omega t - 2\pi/3)$$

$$B_3 = B_m \cos(\omega t + 2\pi/3)$$

Obrtno magnetno polje

Nakon sabiranja vektora B , projekcije na x i y osu rezultujućeg vektora su

$$B_x = B_1 + (B_2 + B_3) \cos(2\pi / 3)$$

$$B_y = (B_2 - B_3) \sin(2\pi / 3)$$

Zamenom trenutne vrednosti magnetne indukcije u prethodna dva izraza dobija se

$$B_x = \frac{3}{2} B_m \cos \omega t \quad B_y = \frac{3}{2} B_m \sin \omega t$$

Intenzitet rezultujućeg vektora je

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \frac{3}{2} B_m$$

i zaklapa sa x osom ugao

$$\alpha = \arctg \frac{B_y}{B_x} = \arctg \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} = \omega t$$

što znači da se vektor magnetne indukcije obrće stalnom ugaonom brzinom ω .

Ukoliko se zamene mesta dveju faza promeniće se i smer obrtanja vektora B .

Kako strujna kontura u magnetnom polju teži da zauzme položaj u kome se njen vektor površine poklapa sa vektorom magnetne indukcije, obrtno magnetno polje se koristi za pokretanje električnih motora.